АННОТАЦИЯ

диссертации Сулейменовой Зои Изтелеуовны на соискание степени доктора философии (PhD) по образаовательной программе «8D05401-Математика» на тему:
«Об асимптотических поведениях решений и вопросах осреднения некоторых случайных параболических уравнений и систем уравнений»

Стохастический анализ является одним из наиболее фундаментальных и актуальных разделов современной математики как в теоретическом, так и в прикладном аспектах, что является общепризнанным фактом в научном математическом сообществе. В настоящее время, опираясь на классическую теорию вероятностей и математическую статистику, данное направление привело к формированию новых научных областей таких как актуарная, финансовая и страховая математика, возникших как прикладные направления указанной теории. Известно, что общая теория турбулентности, основанная на математическом подходе, предложенном А.Н.Колмогоровым, также базируется на аппарате стохастического анализа.

В связи с выше изложенным исследования в области стохастического анализа предполагают не только идейное развитие и обобщение ранее полученных результатов, но и построение новых математических моделей, получение в рамках этих моделей новых результатов, а также их строгий математический анализ.

Цель исследования. Доказательство новых версий неклассических предельных теорем; доказательство теорем о представлении решений некоторых случайных параболических уравнений в терминах условных математических ожиданий, взятых вдоль траекторий соответствующих стохастических процессов, доказательство асимптотической нормальности решений и усреднение уравнения теплопроводности в дельта-коррелированном потоке; доказательство теоремы Ферстенберговского типа для стохастического мультипликативного интеграла; исследование эволюции магнитного поля в линейной марковской модели; задание дискретной кинематической динамо-модели, получение явной формулы для верхнего показателя Ляпунова в рамках данной модели и доказательство существования фазового перехода.

Объект исследования. Суммы независимых случайных величин; представления решений параболических уравнений через условные математические ожидания, взятые вдоль траекторий случайного процесса, определяемого соответствующим уравнением, и исследование решений с использованием указанных представлений; несжимаемый линейный марковский поток скоростей, уравнение магнитной индукции в таком потоке и Ферстенберговская теорема для связанного с данным уравнением марковского стохастического мультипликативного интеграла (матрицанта); дискретная модель кинематического динамо и фазовый переход для магнитного поля в рамках данной модели.

Методы исследования. Используемые методы – методы характеристических функций и сопутствующих распределений теории вероятностей; методы дифференциальных уравнений в теории случайных процессов; методы теории мультипликативных интегралов; современные методы теории стохастических дифференциальных уравнений и теории случайных процессов.

Научная новизна. Основные результаты, представленные на защиту. В пространстве функций распределения в терминах расстояния Леви были введены несколько вариантов неклассических предельных теорем. С использованием метода характеристических функций и метода сопутствующих распределений была получена универсальная форма обобщения центральных предельных теорем Линдеберга–Феллера. Доказаны новые утверждения, существенно обобщающие классические центральные предельные теоремы.

Параболические уравнения и их системы были переписаны в виде уравнений, инфинитезимальные операторы которых определяются случайными процессами. Характеристики решений были получены в терминах условных математических ожиданий. С помощью преобразования Лапласа доказано, что решения некоторых уравнений сводятся к решениям простых обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Установлена асимптотическая нормальность решений параболического уравнения, возмущённого случайным процессом типа «белый шум». В задаче усреднения случайных параболических уравнений выведены параболические уравнения для среднего температурного поля и для двухточечного среднего температурного поля.

Введена несжимаемая линейная марковская модель и для эволюции магнитного поля построен специальный мультипликативный стохастический интеграл (матрицант). На основе теории Л.Хермандера доказана теорема Ферстенберговского типа для параболического оператора и случайных процессов с строго положительной плотностью переходных вероятностей. Предложена дискретная модель кинематического динамо и исследованы её вероятностные характеристики.

Получены явные формулы для показателей Ляпунова и моментов магнитного поля. Определены области экспоненциального роста и затухания энергии магнитного поля, соответствующие явлению фазового перехода. Разработаны новые стохастические модели и явные расчётные формулы, описывающие динамику и устойчивость магнитного поля, а также продемонстрировано применение теорем Ферстенберговского типа к задачам эволюции магнитного поля.

Аппробация. Результаты диссертации доложены и обсуждены на международной конференции " Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics " (Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. Almaty, Kazakhstan. ICAAM 2016), «VI congress of the Turkic world mathematical society» (2-5 октябрь 2017. Astana, Kazakhstan. TWMS 2017), «Актуальные проблемы чистой и прикладной математики" (Алматы, Казахстан, 22-25 июнь 2017 г), "Прикладная математика, управление и

информатики" (3-5 октябрь 2012 г., Белгород, Россия), «Actual problems of stochastic analysis» (20 – 21 апрель 2021, Tashkent, Uzbekistan), «TWMS 2017. VI congress of the Turkic world mathematical society» (2-5 октябрь 2017. Astana, Kazakhstan), «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики» (12-13 июнь 2019, Караганда, Казахстан), «Limit theorems of probability theory and mathematical statistics» (26-28 сентябрь 2022, Tashkent, Uzbekistan), а также на научных семинарах кафедры «Математика» и кафедры «Вычислительные науки и статистика» механико-математического факультета КазНУ имени аль-Фараби.

Публикации. По результатам диссертационного исследования опубликовано 17 работ, в том числе:

— 3 статьи в научных журналах, входящих в базе данных Scopus соответственно:

1. *N.Akanbay, S.A.Molchanov, Z.I. Suleimenova.* Theorem of Furstenberg type for multiplicative stochastic integrals. - Random operatore and Stochastic equations., 28:3 (2020), 163-176. (DOI:10.1515/rose-2020-2035, (Scopus - 11%, Web of Science - Q4, SJR= 0.164)

2. *N. Akanbay., Z.I.Suleimenova., S.K.Tapeyeva.* The multiplicative integral and the evolution of the magnetic field in the Marcov linear model - Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science, 2025, Volume 126, issue 2, Pages 25-40. (DOI: 10.26577/jmmcs2025126202), (Скопус 18%,Web of Science - Q4, SJR= 0.272)

3. *Н.Аканбай., С.А.Молчанов., З.И.Сулейменова.* Модель кинематического динамо – Успехи математических наук, 79:4 (478), 2024, 171-172. *N.Akanbay., S.A.Molchanov Z.I.Suleimenova.* Model of discrete kinematic dynamo- Russian Mathematical Surveys, 2024, Volume 79, Issue 4, Pages 724–726. (DOI:10.4213/rm10190), (Scopus - 66%, Web of Science - Q1, SJR= 0.684)

—6 статьи в журналах, рекомендованных комитетом по обеспечению качества в сфере образования и науки МНиВО РК

1. Аканбай Е.Н., Сулейменова З.И. “О моментных уравнениях магнитного поля в случайных марковских линейных течениях ”. Вестник КазГУ. Серия матем, мех,инф. № 12 1998г, с. 192-198. 7 стр. МРНТИ: 27.35.29,
2. Н.Аканбай, А.Б.Ахмедов, Сулейменова З.И. «О некоторых вариантах неклассической центральной предельной теоремы». Вестник КазНУ, сер. мат., мех., инф. 2013. № 2 (77), с. 52-64. МРНТИ: 27.43.15.
3. Н.Аканбай., Сулейменова З.И. О вероятностных происхождениях некоторых комбинаторных соотношений. Вестник КазНПУ им Абая, серия «физико-математические науки» №2(50) 2015. С.14-20.
4. Сулейменова З.И. О вероятностном представлении решения задачи Коши для одного параболического уравнения и его применениях. Вестник Кыргызско-Российского Славянского университета– 2016, т.16, № 9, с. 25-31.
5. Akanbay N., Suleymenova Z.. On the probabilistic solution of the Cauchy problem for parabolic equations - Al-Farabi Kazakh National University (Journal of Mathematics, Mechanics and Computer Science), № 2 (94), 2017. - p. 21-34.

6. Аканбай Е.Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.К. Асимптотическая нормальность решения параболического уравнения со случайными быстро осциллирующими коэффициентами- Вестник КазНИТУ, 2020. № 6 (142) – с. 572-581.

— 8 публикаций в сборнике тезисов международных конференций

1. *Akanbay N., Suleymenova Z., Tapeeva S.* On asymptotic normality of solutions of the Cauchy problem of a parabolic equation with random right side - ICAAM 2016. Third International Conference on Analysis and Applied Mathematics. Institute of Mathematics and Mathematical Modeling. Almaty, Kazakhstan. The Abstract Book, p. 201

2. *Akanbay N., Nurkhanova M.S. Suleimenova Z.I.* On averaging of the equation of thermal conductivity in a random delta-correlated flow - TWMS 2017. VI congress of the Turkic world mathematical society. Octobor, 2-5, 2017. Astana, Kazakhstan. The Abstract Book - p. 287 – 288

3. *Аканбай Н.,Сулейменова З.И.,* Об асимптотических поведениях решений некоторых случайных параболических уравнений - Материалы Международной конференции «Актуальные проблемы чистой и прикладной математики» - Алматы, 22–25 августа 2017. - 87-88 с.

4. *Аканбай Н.,Сулейменова З.И., Тапеева С.К.* О моментных уравнениях температурного поля в случайном потоке с мгновенной по времени корреляцией - Сборник трудов Международной научной конференции "Прикладная математика, управление и информатики", 3-5 октября 2012., Белгород (Россия). Том I, с.16-19.

5. *Аканбай Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.Қ.* Об осреднении уравнения температурного поля в дельта – коррелированном по времени случайном течении - Procedings of scientific conference «Actual problems of stochastic analysis» – February 20 – 21, 2021, Tashkent, Uzbekistan. - p.113-116

6. *Akanbay N., Nurkhanova M.S. Suleimenova Z.I.* Linear model of the hydromagnetic dynamo and multiplicative products of Markov random matrices - TWMS 2017. VI congress of the Turkic world mathematical society. Octobor, 2-5, 2017. Astana, Kazakhstan. The Abstract Book, p. 286 - 287

7. *Аканбай Н., Сулейменова З.И., Тапеева С.Қ.* Эволюции магнитного поля в марковской линейной модели- Материалы Международной научной конференци «Теоретические и прикладные вопросы математики, механики и информатики», 12-13 июня 2019 года, Караганда, Казахстан, стр. 61 – 62.

8. *Akanbay N., Suleimenova Z.I., Tapeyeva S.K.* Multiplicative integral and asymptotic analisis of the magnetic field equation in the Marcov lintar model - Abstracts of communications. International conference «Limit theorems of probability theory and mathematical statistics» - September 26-28, 2022, Tashkent, Uzbekistan. - p. 8 – 10.

Структура диссертации. Диссертационная работа состоит из нормативных ссылок, введения, трёх основных разделов (каждый из которых содержит подразделы), заключения и списка использованной литературы.

Во введении приведены обоснование актуальности исследования, цель работы, математическая постановка исследуемых задач, результаты,

выносимые на защиту, объект исследования, научная новизна полученных результатов и их теоретическая и практическая значимость, а также сведения об апробации результатов, публикациях автора, структуре диссертационной работы и краткий обзор содержания разделов и заключения.

В первом разделе диссертации с использованием метода характеристических функций и метода сопутствующих распределений доказаны несколько вариантов неклассических предельных теорем теории вероятностей, то есть предельных теорем, не требующих выполнения условия равномерной бесконечно малости слагаемых, сформулированных в пространстве функций распределения в терминах расстояния Леви. Показано, что полученные теоремы являются существенными обобщениями центральных предельных теорем Линдеберга–Феллера.

Во втором разделе диссертации доказаны теоремы о том, что решения ряда параболических уравнений и систем уравнений могут быть представлены в виде условных математических ожиданий вдоль траекторий случайных процессов, построенных как решения соответствующих стохастических дифференциальных уравнений, инфинитезимальные операторы которых совпадают с операторами, стоящими в правых частях рассматриваемых уравнений.

Полученные результаты использованы для доказательства утверждений о возможности получения параболических уравнений для совместной характеристической функции различных функционалов траекторий случайных процессов, их стохастических интегралов и стохастических интегралов Ито от этих процессов. В ряде частных случаев показано, что после преобразования Лапласа решения таких уравнений сводятся к решениям обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и приведены соответствующие примеры. Кроме того, доказана асимптотическая нормальность решения одного параболического уравнения, возмущённого случайным процессом типа «белый шум».

Вопросы усреднения случайных параболических уравнений рассмотрены на примере уравнения теплопроводности в дельта-коррелированном случайном потоке, и выведены соответствующие параболические уравнения для среднего температурного поля и для двухточечного среднего температурного поля в один и тот же момент времени.

Третий раздел диссертации посвящён исследованию уравнения магнитной индукции в несжимаемом потоке в кинематической постановке, то есть в модели, в которой предполагается известными вероятностно-статистические характеристики поля скоростей и не учитывается обратное влияние магнитного поля на поток скоростей.

Введено понятие несжимаемой линейной марковской модели, обобщающей в определённом смысле несжимаемые потоки скоростей с короткой корреляцией и марковской структурой, и для магнитного поля в рамках данной модели получена явная интегральная формула, выражающая его через специальный мультипликативный стохастический интеграл.

В пункте 3.1 третьего раздела, с учётом того, что существование строго положительной плотности переходных вероятностей случайного процесса с

инфинитезимальным оператором, являющимся вырожденным параболическим оператором, содержащим смешанные производные по аргументам, следует из теории гипоэллиптических дифференциальных уравнений второго порядка Л.Хермандера, доказана теорема Ферстенберговского типа для стохастического мультипликативного интеграла (матрицанта), то есть мультипликативного произведения специальных марковских матриц, связанного с несжимаемой линейной марковской моделью. Кратко рассмотрены вопросы применения данной теоремы к исследованию эволюции магнитного поля.

Пункт 3.2 третьего раздела посвящён исследованию уравнения магнитной индукции в трёхмерном пространстве. В нём введено понятие дискретной модели кинематического динамо, приведено её вероятностное описание и исследованы аналогичные вопросы для случая, когда поле скоростей в данной дискретной модели является дельта-коррелированным гауссовским полем. В частности, сначала процесс, инфинитезимальный оператор которого совпадает с оператором в правой части уравнения магнитной индукции, определяется как решение соответствующего стохастического дифференциального уравнения (лагранжева траектория), после чего решение уравнения магнитной индукции представлено с помощью дискретного аналога формулы Каца–Фейнмана. Исследование моментов магнитного поля и соответствующих показателей Ляпунова проведено на основе данного представления.

Основные результаты, полученные в пункте 3.2, заключаются в следующем:

1. доказано, что наибольший показатель Ляпунова является строго положительным ($\gamma_2 > 0$) (теорема Ферстенберговского типа);
2. получена явная формула для вычисления показателя γ_2;
3. показано, что нечётные моменты магнитного поля равны нулю, а для чётных моментов, в частности для второго момента, найдены точные формулы вычисления;
4. доказаны теоремы о наличии фазового перехода для показателя γ_2, соответствующего существованию областей экспоненциального роста и затухания энергии магнитного поля, и приведены явные описания этих областей.

В заключении приведены основные результаты и выводы, полученные в ходе выполнения диссертационной работы.

Степень внедрения. Полученные результаты диссертационной работы находят применение при использовании центральных предельных теорем теории вероятностей, при записи решений случайных параболических уравнений через условные математические ожидания вдоль траекторий процессов, соответствующих данным уравнениям, а также при исследовании решений на основе таких представлений, а также при определении асимптотического поведения обычных и мультипликативных произведений случайных матриц.

Область применения. Полученные результаты находят применение при решении задач математики, гидродинамики и физики, а также в теории

вероятностей, теории характеристических функций, теории случайных процессов, теории мультипликативных интегралов и теории стохастических дифференциальных уравнений.

Вклад кандидата в статью. По результатам диссертационной работы опубликовано 3 статьи в журналах, входящих в базы данных Scopus и Web of Science**,** 5 статей- в отечественных журналах и 1 статья- в журнале Кыргызстана. Кандидат глубоко освоил применяемые методы и подходы, а также теоретический материал, изложенный в статьях, тщательно проанализировал и осмыслил его. При этом каждый полученный результат в разделах работы непосредственно связан с деятельностью кандидата. В отдельных случаях, требующих дополнительных теоретических знаний, кандидат обращался за консультациями к отечественным и зарубежным научным руководителям.